Matrice

Definicija Matrica je pravougaona tablica brojeva, koja sadrži m vrsta iste dužine (ili n-kolona iste dužine). Matricu zapisujemo u obliku

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ili skraćeno $A = (a_{ij})_{m \times n}$, gdje je $i = 1, 2, \dots, m$ broj vrsta, a $j = 1, 2, \dots, n$ broj kolona. Matrica A se naziva matricom tipa (reda) $m \times n$ i često se piše $A_{m \times n}$. Brojevi a_{ij} su elementi matrice.

Matrice su jednake među sobom ako su im odgovarajući elementi jednaki (naravno, upoređuju se samo matrice istog tipa) tj.

$$A = B \text{ ako } a_{ij} = b_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

Matrica kod koje je broj vrsta jednak broju kolona se naziva kvadratnom matricom.

Kvadratna matrica ~~kod~~ ima oblik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementi a_{ii}, $i=\overline{1,n}$ kvadratne matrice su elementi sa glavne dijagonale matrice.

Kvadratna matrica kod koje su svi elementi, osim elemenata sa glavne dijagonale, jednaki nuli naziva se dijagonalnom matricom.

Dijagonalna matrica kod koje su svi elementi ~~na~~ glavnoj dijagonali jednaki jedinici naziva se jediničnom matricom i označavamo je slovom E.

<u>Primjer</u>: Jedinična matrica 3-ćeg reda (3x3) je:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jedinična matrica n-tog reda:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Kvadratna matrica se naziva trougaonom ako su svi elementi koji se nalaze sa bilo koje strane glavne dijagonale (sa jedne od dvije strane) jednaki nuli.

Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli naziva se nula matricom i označava se sa $O_{m\times n}$.

U matričnom računu ~~m~~atrice O i E igraju ulogu brojeva 0 i 1 u aritmetici.

Matrica koja sadrži jednu vrstu ili jednu kolonu naziva se vektorom vrstom, odnosno vektorom kolonom.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matrica koja se dobija iz zadate matrice ~~tako~~ što vrste i kolone zamijene mjesta, naziva se transponovanom matricom date matrice. Za datu matricu A sa A^T označavamo njenu transponovanu matricu.

Primjer $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transponovanje matrica ima svojstvo da je $(A^T)^T = A$.

Operacije nad matricama

Zbir matrica

~~Zbir~~ matrica $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{ij})_{m\times n}$, istog tipa, je matrica $C = (c_{ij})_{m\times n}$ istog tipa, takva da je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Pišemo $C = A + B$.

Primjer

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Svojstva sabiranja matrica

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $A+O=A$
4) $A+(-A)=O_{m\times n}$

$-A$ je matrica suprotna matrici $A=(a_{ij})_{m\times n}$ tako da je $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$.

Množenje matrice brojem (skalarom)

Proizvod matrice $A=(a_{ij})_{m\times n}$ i broja k je matrica $B=(b_{ij})_{m\times n}$ (istog tipa kao i matrica A) takva da je $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.
Zapisujemo $B=k\cdot A$.
Matricu $-A$ možemo dobiti tako što matricu A pomnožimo brojem (-1) tj $-A=(-1)\cdot A$, pa je $A-B=A+(-B)$.

Svojstva

5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
7) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
8) $1\cdot A=A$

Proizvod matrica

<u>Definicija</u> Proizvod matrice $A=(a_{ij})_{m\times k}$ i matrice $B=(b_{ij})_{k\times n}$ je matrica $C=A\cdot B$ ~~$=(c_{ij})_{m}$~~ $C=(c_{ij})_{m\times n}$, gdje je:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj},$$
$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

tj matrice se množe kombinovanjem vrsta prve matrice sa kolonama druge matrice i to tako da je element i-te vrste i j-te kolone matrice C jednak zbiru proizvoda elemenata i-te vrste matric A sa odgovarajućim elementima j-te kolone matrice B.

Matrice mogu da se množe samo ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice.

Svojstva množenja matrica

1) Množenje u opštem slučaju nije komutativno

<u>Primjer</u> $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Znači, $A\cdot B\neq B\cdot A$

2) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

4) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

5) $\lambda(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$

Ako je A kvadratna matrica, onda je uvijek

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Dalje, $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A, \quad A^m \cdot A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{m \cdot n}$$

Za operaciju transponovanja važe sljedeća svojstva:

$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Elementarne transformacije matrica

Elementarne transformacije matrica su:

1) Međusobna zamjena mjesta dvije vrste (ili kolone)
2) Množenje jedne vrste (ili kolone) brojem različitim od nule
3) Dodavanje jednoj vrsti (ili koloni) elemente neke druge vrste (ili kolone) pomnožene nekim brojem različitim od nule.

Dvije matrice A i B nazivaju se ekvivalentnim matricama ako je jedna od njih dobijena iz druge pomoću elementarnih transformacija. Ekvivalentne matrice označavamo sa $A \sim B$.

Pomoću elementarnih transformacija svaku matricu možemo transformisati u matricu kod koje se u početku glavne dijagonale nalaze redom nekoliko jedinica, a svi ostali elementi su nule.
Takvu matricu nazivamo kanonskom.

<u>Primjer</u> Transformisati u kanonski oblik matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Rješenje</u> Pomoću elementarnih transformacija dobijamo:

I vr + II vr
I vr (-5) + III vr

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & \underbrace{-15}_{:5} & \underbrace{-6}_{:2} & \underbrace{-9}_{:3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovo je kanonski oblik matrice A

Determinante

Determinante se definišu samo za kvadratne matrice. Definišimo prvo determinantu za matricu drugog reda:

Determinanta za kvadratnu matricu drugog reda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ je broj } \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Često se osim sa $\det A$ determinanta matrice A označava i sa $|A|$. Uočimo da postoje dva sabirka i u svakom od njih se pojavljuje tačno jedan element iz svake vrste i tačno po jedan element iz svake kolone. Drugim riječima, sabirci su oblika $\pm a_{1j_1} a_{2j_2}$, gdje je $j_1 j_2$ jedna od ukupno dvije permutacije skupa $\{1,2\}$. Te permutacije su

1 2 (vezuje se znak +)

2 1 (vezuje se znak −).

Determinanta za kvadratnu matricu trećeg reda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ je broj}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Kao i kod determinante drugog reda, svi sabirci su oblika $\pm a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, gdje je $j_1 j_2 j_3$ jedna od ukupno šest permutacija skupa $\{1,2,3\}$.

To su permutacije:

$p_1 = 123$, $p_2 = 132$, $p_3 = 213$, $p_4 = 231$, $p_5 = 312$, $p_6 = 321$

Kažemo da su dva broja u inverziji ako nisu dati u prirodnom poretku (veći broj ispred manjeg). U permutaciji:

- p_1 - ima nula inverzija
- p_2 - imamo jednu inverziju - $(3,2)$
- p_3 - imamo jednu inverziju - $(2,1)$
- p_4 - imamo dvije inverzije - $(2,1)$, $(3,1)$
- p_5 - imamo dvije inverzije - $(3,1)$, $(3,2)$
- p_6 imamo tri inverzije i to $(3,2)$, $(3,1)$ i $(2,1)$.

Permutaciju koja ima nulu ili paran broj inverzija nazivamo parnom, a onu koja ima neparan broj inverzija neparnom. Ako je $j_1 j_2 j_3$ parna permutacija za nju vežemo znak plus, a ako je neparna permutacija za nju vežemo znak minus.

Tada dobijamo izraz za determinantu trećeg reda. Označimo sa p_j - j-tu permutaciju $j_1 j_2 j_3$ brojeva $1, 2, 3$, a sa $J(p_j)$ broj inverzija u toj permutaciji. Ukupan broj permutacija je $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Tada determinantu trećeg reda možemo zapisati kao:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3!=6} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3}$$

Determinanta n-tog reda

Definicija

Neka je data kvadratna matrica n-tog reda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinanta n-tog reda kvadratne matrice A je broj:

$$\boxed{\det A = \sum_{n=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}}$$

gdje je $j_1 j_2 \ldots j_n$ neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, koju označimo sa p_j, a $J(p_j)$ broj inverzija u toj permutaciji.

Svojstva determinanti

1) $\det A = \det A^T$

Determinanta se ne mijenja ako vrste i kolone zamijene mjesta

Primjer:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Ako se matrica B dobija iz matrice A, tako što se i-ta vrsta (j-ta kolona) matrice A pomnoži brojem k, onda je determinanta matrice B jednaka $k \cdot \det A$.

Drugim riječima, determinanta se množi brojem tako što se svi elementi jedne vrste (ili kolone) pomnože tim brojem.

Dokaz $b_{lj} = a_{lj} \quad l \neq i$

$b_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad j = \overline{1,n}$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (k a_{lj_l}) \cdots a_{nj_n} =$$

$$= k \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} = k \det A$$

3) Neka se elementi i-te vrste matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ dati u obliku zbira $a_{ij} = a_{ij}' + a_{ij}''$, $j = \overline{1,n}$ i neka su A' i A'' matrice koje se dobijaju iz matrice A, tako što se u i-toj vrsti matrice A, elementi a_{ij} zamijene sa a_{ij}', odnosno a_{ij}''.

Tada je $\det A = \det A' + \det A''$.

Slično važi i za kolone.

Dokaz: $$\det A = \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots (a_{ij_i}' + a_{ij_i}'') \cdots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i}' \cdots a_{nj_n} + \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{J(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i}'' \cdots a_{nj_n}$$

$$= \det A' + \det A''$$

4) Ako su elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli onda je determinanta jednaka nuli

5) Ako su elementi dvije vrste (kolone) jednaki, onda je determinanta jednaka nuli.

6) Determinanta ne mijenja svoju vrijednost ako se svakom elementu jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (kolone) pomnoženi nekim proizvoljnim brojem različitim od nule

7) Ako dvije vrste (kolone) u determinanti promijene mjesta determinanta mijenja znak

8) Ako su A i B kvadratne matrice istog reda onda je

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Razvoj determinante

Za računanje determinanti se često koristi tako-zvano razvijanje determinanti po jednoj vrsti ili po koloni, koje se zasniva na Laplasovoj teoremi.

Prije nego definišemo Laplasovu teoremu uvedimo pojam minora i algebarskog komplementa.

Definicija Minor matrice A n-tog reda za element a_{ij} te matrice je determinanta $(n-1)$-og reda, koji označavamo sa M_{ij}, a koja se dobija kada iz matrice A udaljimo i-tu vrstu i j-tu kolonu.

Veličinu $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$ nazivamo algebarskim komplementom elementa a_{ij} matrice A.

Laplasova teorema

a) Suma proizvoda elemenata a_{ij} bilo koje vrste (kolone) kvadratne matrice $A=(a_{ij})_{n\times n}$ i algebarskih komplemenata tih elemenata jednaka je determinanti matrice A, odnosno

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\det A,\ i=1,2,\dots,n$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}=\det A,\ j=1,2,\dots,n$$

b) Suma proizvoda elemenata a_{ij} bilo koje vrste (kolone) kvadratne matrice $A=(a_{ij})_{n\times n}$ i algebarskih komplemenata elemenata neke druge vrste (kolone) jednaka je nuli, odnosno

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\dots+a_{in}A_{kn}=0,\ i=\overline{1,n},\ k\neq i$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\dots+a_{nj}A_{nk}=0,\ j=\overline{1,n},\ k\neq j.$$

Primjer Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & \boxed{0} & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} =$$

Determinantu ćemo razviti po trećoj koloni jer u njoj ima najviše elemenata koji su jednaki nuli.

$$=0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix}+$$

$$+7\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 2 & 11\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 5 & 9\end{vmatrix} =$$

$$= (55-72-4-20-18-44)+7\cdot(16+6+4+66)=$$

$$= -103+574 = 471.$$

Inverzna matrica

<u>Definicija</u> Matrica B se naziva inverznom matricom matrice A ako važi $\boxed{A\cdot B = B\cdot A = E}$. U tom slučaju matricu B označavamo sa $B = A^{-1}$.

Ako matrica A ima inverznu matricu onda je nazivamo <u>regularnom</u> matricom.

Neka je $A = (a_{ij})_{n\times n}$ kvadratna matrica i neka su A_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, algebarski komplementi elemenata matrice A. Matricu

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

nazivamo adjungovanom matricom matrice A.

Znači, adjungovana matrica je transponovana matrica matrice čiji su elementi algebarski komplementi elemenata matrice A.

Teorema a) A je regularna matrica ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

b) Ako je $\det A \neq 0$ onda je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Dokaz Posmatrajmo matricu $C = A \cdot \operatorname{adj} A$. Elementi matrice C su $c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$. Iz Laplasove teoreme slijedi da je matrica C dijagonalna matrica čiji su svi elementi na dijagonali jednaki $\det A$. Znači, da je matrica $C = \det A \cdot E$. Slično se dokazuje da je $\operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E$. Ako je $\det A \neq 0$, onda je

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) \cdot A = E$$

Odavde, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$

Svojstva inverzne matrice

1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2) $(A^{-1})^{-1} = A$.
3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Inverzna matrica nam omogućava da rješavamo matričnu jednačinu $A \cdot X = B$, gdje je X nepoznata matrica.
Ukoliko jednačinu $A \cdot X = B$ pomnožimo sa A^{-1} s lijeve strane (ako A^{-1} postoji) onda dobijamo

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Pošto je $A^{-1} \cdot A = E$, a $E \cdot X = X$,
onda dobijamo da je $X = A^{-1} \cdot B$.

Rang matrice

Definišimo prvo minor matrice.

Definicija Izaberimo u datoj matrici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ proizvoljnim postupkom k vrsta i k kolona, $k \leq \min(m, n)$. Elementi koji se nalaze na presjecima tih vrsta sa kolonama obrazuju kvadratnu podmatricu k-tog reda matrice A. Determinantu te podmatrice k-tog reda matrice A, nazivamo minorom k-tog reda matrice A.

Definicija Rangom matrice A naziva se maksimalni red regularnog minora matrice A, tj. matrica A ima rang r ako:

1) Postoji bar jedan regularan minor r-tog reda matrice A
2) su svi minori matrice A većeg reda od r neregularni.

Rang ćemo označavati sa rang A.

Minor koji definiše rang matrice (regularan) nazivamo baznim minorom. Matrica može da ima nekoliko baznih minora.

Primjer Nađi rang matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Rješenje Maksimalni rang matrice A je $\min(3;4)=3$. Pošto su svi minori trećeg reda jednaki nuli, a postoji minor drugog reda $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$,

znači da je $\text{rang}(A) = 2$.

Svojstva ranga matrice:

1) Transponovanjem matrice rang se ne mijenja
2) Ako iz matrice udaljimo vrstu (ili kolonu) čiji su svi elementi jednaki nuli rang matrice se ne mijenja
3) Elementarnim transformacijama rang matrice se ne mijenja. Odnosno, znači da ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Rang kanonske matrice jednak je broju jedinica na glavnoj dijagonali. To je jedan od načina računanja ranga matrice.

Primjer Nađi rang matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Rješenje Ovaj primjer smo već razmatrali kada smo pričali o ekvivalentnim matricama (str 19). Vidjeli smo da je

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odnosno,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Na taj način imamo da je $\text{rang}(A) = 2$